Varianta 099

Subiectul I

a) $5\sqrt{2}$. b) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$. c) $2x+3y=13$. d) $\overrightarrow{LM}(-1,1), \overrightarrow{MN}(-1,1) \Rightarrow$ L, M, N coliniare. e) $\frac{5}{3}$.
f) $a=1, b=0$.

Subiectul II

1. a) 8. b) $\frac{2}{5}$. c) $f(1)=2 \Rightarrow g(2)=1$. d) $x=\pm 1$. e) 0.
2. a) $f'(x)=2xe^{x^2}$. b) $e-1$. c) $f''(x)=2e^{x^2}(1+2x^2)>0, \forall x\in \mathbf{R} \Rightarrow f$ convexa pe **R.**
   d) $f'(1)=2e$. e) $\frac{e-1}{2}$.

Subiectul III

a) $O_2^2=O_2 \Rightarrow O_2\in N; A^2=O_2 \Rightarrow A\in N$.
b) $I_2^2=I_2\neq O_2 \Rightarrow I_2\notin N$
c) Dacă $B\in N \Rightarrow \hat{a}^2+\hat{b}\hat{c}=0; (\hat{a}+\hat{d})\cdot\hat{b}=\hat{0}; (\hat{a}+\hat{d})\cdot\hat{c}=0; \hat{d}^2+\hat{b}\hat{c}=\hat{0}\Rightarrow$
1. Daca $\hat{a}+\hat{d}\neq 0 \Rightarrow \hat{a}=\hat{b}=\hat{c}=\hat{d}=\hat{0}$, deci $\hat{a}+\hat{d}=\hat{0}$, contradictie.
2. $\hat{a}+\hat{d}=\hat{0}\Rightarrow \hat{a}\cdot\hat{d}-\hat{b}\cdot\hat{c}=0$.

d) $C=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0}\end{pmatrix}\in M_2(\mathbf{Z}_3)$, $\det(C)=0$ si $\hat{a}+\hat{d}=\hat{1}\neq\hat{0}\Rightarrow C\notin N$.
e) $3^4=81$ elemente.
f) Fie $P,Q\in N, P\cdot Q=Q\cdot P$. Avem: $(P+Q)^3=P^3+3P^2Q+3PQ^2+Q^3=O_2\Rightarrow$
$(P+Q)^2=O_2 \Leftrightarrow P^2+2PQ+Q^2=O_2\Leftrightarrow PQ=O_2$
g) Dacă $I_2=A_1+A_2+...+A_n, A_1, A_2,..., A_n\in N$, atunci suma elementelor de pe diagonală în cei doi membri este aceeaşi. În stânga obținem suma $\hat{2}$, iar în dreapta $\hat{0}$, conform c).

Subiectul IV

a) $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}, \forall x\in \mathbf{R}$.
b) $f''(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}<0, \forall x\in(0,\infty)\Rightarrow$ f' strict crescatoare pe $[0,\infty)$.
c) f continuă şi derivabilă pe $\mathbf{R}\Rightarrow f$ continuă pe $[k,k+1]$ şi derivabilă pe $[k,k+1]$, cu k>0 şi putem aplica teorema lui Lagrange pe acest interval $\Rightarrow \exists c\in(k,k+1)$ astfel încât $f(k+1)-f(k)=f'(c)\Rightarrow f(k+1)-f(k)=\frac{1}{c^2+1}$.
d) Folosind c), avem $c\in(k,k+1)$ deci $k<c<k+1$ şi cum f' este strict descrescătoare pe $[0,\infty)$, avem $f'(k)>f'(c)>f'(k+1)$, adica $\frac{1}{(k+1)^2+1}<f(k+1)-f(k)<\frac{1}{k^2+1}, \forall k\in[0,\infty)$.

e) $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)^2+1} > 0 \Rightarrow (a_n)$ strict crescator.

f) din d) $\Rightarrow f(2) - f(1) < \frac{1}{1^2+1}; \ldots; f(n+1) - f(n) < \frac{1}{n^2+1}$; prin insumare se obtine $f(n+1) - f(1) < a_n$

$\frac{1}{1^2+1} < f(1) - f(0); \frac{1}{2^2+1} < f(2) - f(1); \ldots; \frac{1}{n^2+1} < f(n) - f(n-1)$; prin insumare se obtine $a_n < f(n) - f(0)$.

g) Din e, f $\Rightarrow (a_n)$ convergent si trecand la limita in inegalitatile de la f avem $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \le \lim_{n\to\infty} a_n \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.